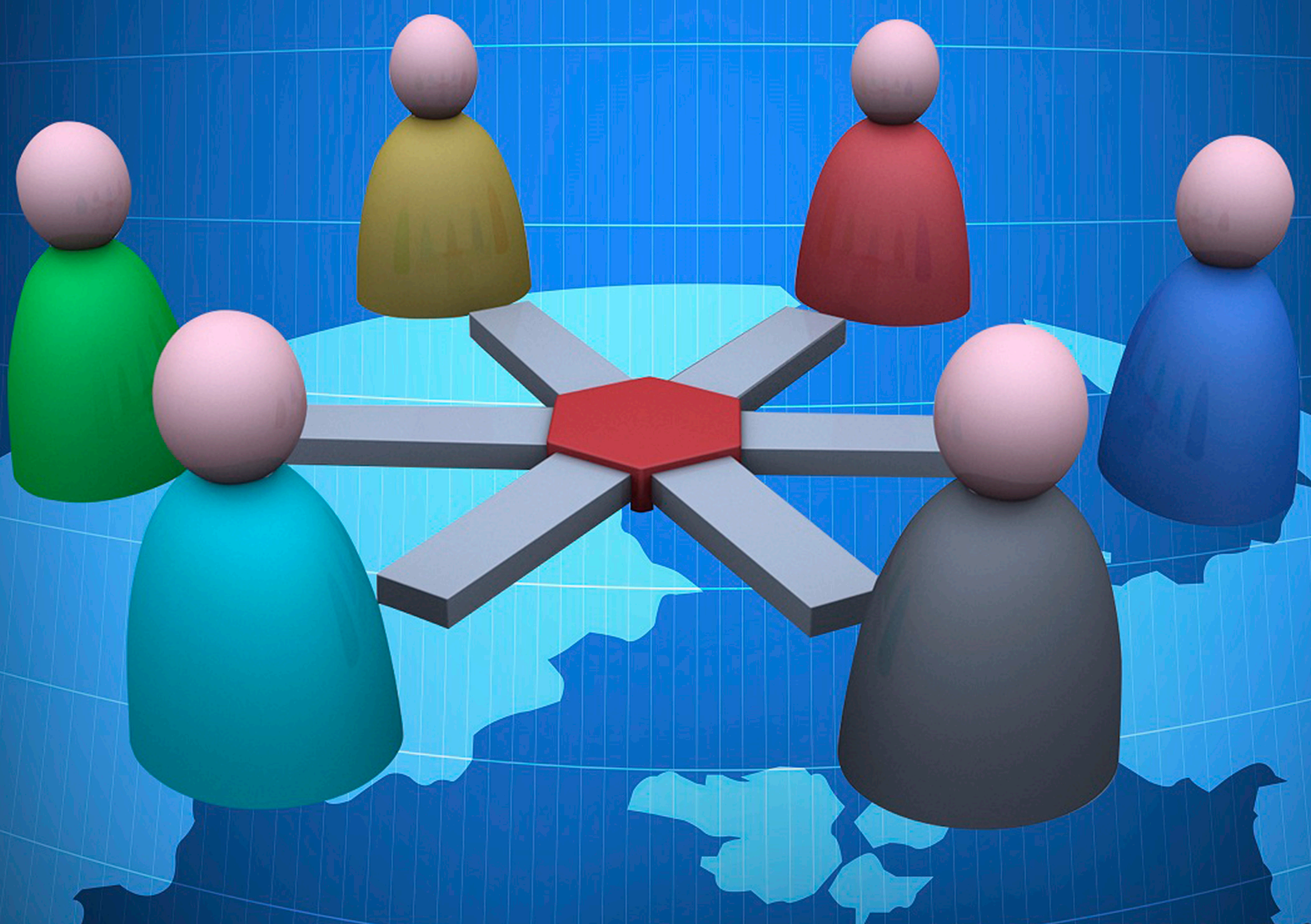
Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

XIV JORNADES DE XARXES D´INVESTIGACIÓ EN DOCÈNCIA UNIVERSITÀRIA

Investigació, innovació i ensenyament universitari: enfocaments pluridisciplinars



XIV JORNADAS DE REDES DE INVESTIGACIÓN EN DOCENCIA UNIVERSITARIA

Investigación, innovación y enseñanza universitaria: enfoques pluridisciplinares

Coordinadores i coordinadors / *Coordinadoras y coordinadores:*

María Teresa Tortosa Ybáñez

Salvador Grau Company

José Daniel Álvarez Teruel

ISBN: 978-84-608-7976-3

Revisión y maquetación: Verónica Francés Tortosa

Publicación: Julio 2016

Un estudio de caso de tematización en el estudio de conceptos económicos modelizados matemáticamente

A. Ariza

Departamento de Innovación y Formación Didáctica-Facultad de Educación
Departamento de Fundamentos del Análisis Económico-Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales
Universidad de Alicante

RESUMEN

Esta investigación tiene como objetivo desarrollar una aproximación a la caracterización del esquema TEMATIZADO en la relación función-derivada en el aprendizaje de conceptos económicos basados en los referentes teóricos derivados de la teoría APOS y usando una métrica derivada de la lógica fuzzy. Partiendo de una metodología de enseñanza integradora entre el lenguaje algebraico y el gráfico en el aprendizaje de conceptos económicos y su interacción con conceptos matemáticos, se analizaron las respuestas de alumnos de ADE a situaciones económicas modelizadas matemáticamente por el concepto de la derivada. Nuestros resultados indican que la tematización del esquema, entendida como nivel de conocimiento más avanzado, se alcanza al identificar y aplicar las relaciones entre la función, la primera y la segunda derivada en nuevos conceptos económicos e independientemente del tipo de convexidad de la función que modeliza el concepto económico. De dichos resultados destacamos la necesidad de profundizar en estrategias de enseñanza y aprendizaje que primen la interdisciplinariedad entre la economía y las matemáticas y dentro de este último campo la complementariedad entre los lenguajes algebraico y gráfico.

Palabras Clave: registro de representación, APOS, conceptos económicos, tematización.

1. INTRODUCCIÓN

1.1 Problema/cuestión

La comprensión de las relaciones entre la función y su función derivada está detrás de la comprensión de muchos conceptos económicos y es fundamental para entender el análisis marginal en el que se basa la disciplina económica en general y microeconómica en particular. Las investigaciones que analizan la relación de los conceptos matemáticos y económicos desde la óptica de los profesores (García, Azcarate y Moreno, 2006), desde los resultados de los propios alumnos (Ariza y Llinares, 2009; Cuesta, Delofeu & Mendes, 2010) y desde lo que se presenta en los libros de texto (Akihito, 2006) indican que algunas veces los conceptos económicos se manejan sin una buena comprensión de los significados matemáticos que los organizan. Esta situación conlleva que las interpretaciones de las situaciones económicas resulten difíciles de realizar si los estudiantes no poseen una comprensión adecuada de los conceptos matemáticos que los organizan. Como consecuencia, resulta importante empezar a generar información sobre la manera en la que los estudiantes de Economía comprenden los conceptos matemáticos que son utilizados en la caracterización de las nociones económicas. El hecho de que algunos conceptos de microeconomía estén modelizados por la relación entre una función y su derivada pone de manifiesto la necesidad de centrar la atención en estos aspectos. En particular, el concepto matemático de función derivada aparece de forma habitual y frecuente en el tratamiento de conceptos económicos, especialmente en aquellos pertenecientes al campo de la Microeconomía. Como señaló Akihito (2006) el análisis marginal es fundamental en la disciplina de la Microeconomía, por lo que el protagonismo del concepto matemático de la derivada es indudable. En este sentido, creemos que muchas de las dificultades que los estudiantes de Microeconomía presentan tienen su origen en una compresión no adecuada de este concepto matemático.

Por otra parte, los estudios que analizan la importancia de los registros de representación en el aprendizaje de conceptos económicos, proponen información controvertida en el sentido de que la utilización del registro gráfico es esencial para aprender Microeconomía (Hey, 2005) o planteando sus limitaciones (Cohn, 2001). Sin embargo, existen argumentos para pensar que el registro gráfico es importante en el aprendizaje de la economía como lo es en el de las matemáticas (Boyd, 1998). Esta situación plantea como un problema de investigación determinar características de la manera en la que se comprende la relación entre una función y la función derivada en el caso de los conceptos económicos modelizados por esta relación.

1.2 Revisión de la literatura

Para caracterizar el desarrollo del esquema relación función-derivada en el aprendizaje de los conceptos económicos utilizaremos la teoría APOE. Esta teoría está basada en la idea de la existencia de niveles en el desarrollo de la comprensión de un concepto (Arnon et al., 2014). La abstracción reflexiva permite la construcción de objetos mentales y de los mecanismos constructivos (Dubinsky, 1991). Piaget e Inherler (1978) consideran que un esquema es la estructura o la organización de acciones que se transfieren o se generalizan con motivo de la repetición de una acción determinada en circunstancias iguales o análogas. Piaget y García (1983/1989) plantean que un esquema se desarrolla a través de tres niveles: INTRA, INTER y TRANS. El nivel INTRA se caracteriza por la realización de acciones considerando de manera aislada los elementos matemáticos, sin coordinación o aparición de relaciones lógicas entre los mismos, y siempre dentro de un mismo registro de representación. Por ejemplo, cálculo formal de la expresión de la derivada de una función en el registro algebraico. En el nivel INTER se establecen relaciones lógicas entre los distintos elementos generalmente en un registro de representación. Por ejemplo, la obtención de la representación gráfica de la derivada a partir de la representación gráfica de la función. Mientras que en el nivel TRANS esas relaciones se realizan sin restricciones y estableciendo la síntesis (obtención de la derivada en ambos registros).

El mecanismo por el cual el individuo se traslada de un nivel a otro es denominado por Piaget y García (1983/89) *"abstracción reflexiva"*. Según Piaget esta abstracción reflexiva ha de entenderse en un doble sentido: la proyección de la existencia de conocimiento dentro de un nivel de pensamiento superior, esto es, trascender y construir una nueva y más compleja estructura de conocimiento, y la reorganización y combinación de elementos estructurales para conseguir un objetivo dado (organización estructural). En relación a la proyección, el modo en el que la organización estructural de acciones, procesos y objetos es llevado a cabo a través de un cambio en los usos, o una aplicación implícita para un objetivo determinado, y a conceptualizar es lo que se denomina tematización. La transición desde un uso implícito a un uso consciente de los elementos matemáticos y el establecimiento de algún tipo de relación entre ellos es lo que se ha llamado una proyección del conocimiento a un nivel de pensamiento superior por abstracción reflexiva, esto es, el proceso por el cual una estructura más compleja de conocimiento es construida. La reorganización del conocimiento es vista por estos autores como la posibilidad de que un esquema pueda ser tematizado para convertirse en otro objeto cognitivo a los que acciones y procesos les puedan ser aplicados.

Cooley, Trigueros y Baker (2003) consideran que un esquema es tematizado cuando se convierte en una realidad para el individuo, alcanza un nivel consciente y puede ser tratado como un concepto nuevo. Dubinsky (1991) caracteriza al esquema por su dinamismo y su continua reconstrucción como consecuencia de la actividad matemática de los individuos en la resolución de problemas específicos. Su coherencia viene determinada por la habilidad del aprendiz en valorar si puede ser usado para resolver una situación matemática particular (Arnon et al, 2014). Desde esta caracterización, García, Llinares y Sánchez-Matamoros (2011) asumen que los dos sentidos de la abstracción reflexiva están determinados por las relaciones que los estudiantes son capaces de hacer conscientemente entre elementos matemáticos, donde la coordinación mostrada en un nivel debe ser una característica observable en el siguiente nivel. Así, la manera en que los estudiantes establecen relaciones entre elementos que ayudan a constituir el esquema son las evidencias de su desarrollo. En particular, y en el contexto de la relación función-derivada supondría por ejemplo analizar hasta qué punto se entiende la idea de la derivada en un punto desde su interpretación geométrica y cómo el límite del cociente incremental, junto con las condiciones en que una función es derivable en un punto, o sobre cómo se obtiene la información en un intervalo sobre el crecimiento, decrecimiento, máximos, mínimos, puntos de inflexión, concavidad, convexidad de una función, etc. García et al (2011) distinguen a aquellos estudiantes que usan implícitamente los significados de los elementos matemáticos de aquellos que de manera consciente los utilizan en la resolución de problemas, de modo que esa distinción permite caracterizar la tematización del esquema. Es decir, se consideran evidencias de la manera en que la abstracción reflexiva opera, constituyendo los primeros un caso de proyección del conocimiento existente a un nivel superior de pensamiento, y el uso consciente de los elementos constituyendo una reorganización o reestructuración del conocimiento en nuevas estructuras. De esta manera, cuando un aprendiz es capaz de reflexionar sobre el significado de las componentes y relaciones que caracterizan el esquema y desarrollar qcciones concientes sobre él se considera que el esquema ha sido tematizado (Piaget & Garcia, 1983/1989, pp. 65, 113). Aunque el significado de tematización ha ido matizándose a lo largo de las diferentes investigaciones podemos considerar que la tematización es el mecanismo por el cual un esquema es transformado en un Objetivo para que pueda ser desarrollado Acciones sobre él o para aplicarle procesos (Arnon et al, 2014).

1.3 Propósito

Con estas referencias teóricas, el objetivo de esta investigación es caracterizar el esquema tematizado de la relación función-derivada cuando se están resolviendo problemas vinculados a conceptos económicos a partir de la observación de estudiantes asignados en el nivel Trans. Para conseguir este objetivo, examinamos cómo estudiantes que habían sido previamente asignados a un nivel Trans de desarrollo del esquema construían relaciones entre las propiedades que relacionan la función con su derivada al resolver problemas con conceptos económicos.

2. METODOLOGÍA

2.1 Descripción del contexto y de los participantes

Los participantes proceden de una muestra amplia de 110 estudiantes matriculados en la asignatura de “Microeconomía”, materia optativa de 3º curso de la Diplomatura de Empresariales. Los contenidos desarrollados en la asignatura de Microeconomía (contexto de nuestra investigación) se centran en los conceptos vinculados a la idea de función y derivada. Los participantes habían cursado en primer curso las materias de Matemáticas y Economía I cuyos contenidos están centrados en las funciones y sus derivadas de una y dos variables (continuidad, cálculo de límites, cálculo y representación de funciones derivadas y derivadas parciales y cálculo integral) y contenidos vinculados a los conceptos económicos (funciones de oferta y demanda, elasticidad, el coste de oportunidad, la frontera de posibilidades de producción, etc).

2.2 Materiales

Estos estudiantes habían respondido a un cuestionario con 5 tareas numeradas de la 0 a la 4 con 12 ítems en total, que presentaban situaciones económicas organizadas a través de la relación entre una función y su derivada y algunos de ellos fueron entrevistados. Cinco de los estudiantes fueron asignados en el nivel Trans (Ariza, Llinares, Vals, 2015)

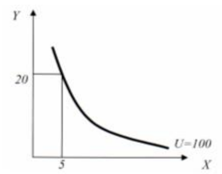
2.3 Instrumentos

La resolución de la tarea 4 (Figura 5) permitía identificar cómo los estudiantes coordinaban los diferentes elementos matemáticos. El análisis se centró en describir que aspectos del esquema “relación función-derivada en conceptos económicos” eran movilizados durante la resolución y cómo eran agrupados por los estudiantes para resolver a las tareas propuestas. La tarea 4 presenta funciones económicas no lineales en el registro gráfico, con información referida a un punto concreto (Figura 1). La tarea contiene dos ítems en los que se pide calcular la función derivada en su totalidad a partir del cálculo de la derivada en un punto, teniendo que argumentar su concavidad-convexidad a través de la 2ª derivada.

Figura 1. Tarea 4 del cuestionario

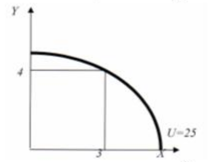
Tarea 4

4.1 Un consumidor presenta la siguiente curva de indiferencia respecto de los bienes de consumo X e Y:



- Calcula la Relación Marginal de Substitución (RMS) en el punto presentado. Dibuja cómo sería la gráfica de la primera derivada de esta función (X en abcisas y RMS en ordenadas) y argumenta por qué es convexa utilizando el concepto de 2ª derivada (puedes apoyarte en expresiones algebraicas que se correspondan con las formas gráficas de las funciones si lo crees oportuno)

4.2. Un consumidor presenta el siguiente tipo de curva de indiferencia hacia los bienes X e Y:



Contesta a las mismas preguntas que el apartado anterior

La resolución de los ítems 4.1 y 4.2 muestra el uso de la derivada en conceptos económicos diferentes a los presentes en las cuestiones resueltas con anterioridad y donde el uso de la derivada no es tan explícito. Además, la resolución de estas cuestiones implica relacionar los conceptos de Curva de Indiferencia y Relación Marginal de Substitución vistos como una relación entre una función y su derivada.

2.4 Procedimientos

Para establecer las características del esquema tematizado de la relación función-derivada en conceptos económicos, hemos analizado las respuestas de los 5 alumnos del nivel

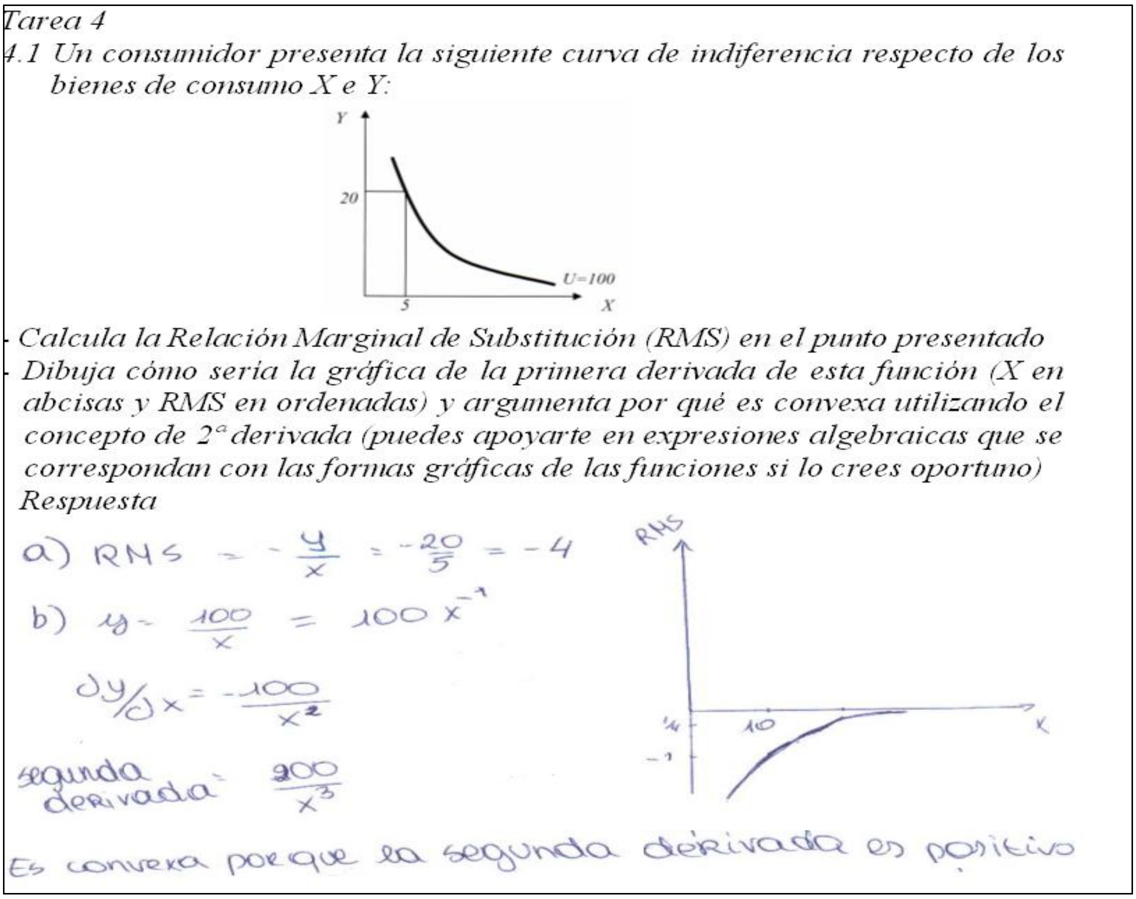
Trans a los ítems 4.1 y 4.2 de la tarea 4 del cuestionario. En estos ítems el concepto de derivada aparece implícito lo que exige a los estudiantes identificar las relaciones función – derivada en unos conceptos económicos que explícitamente no son percibidos como una función y su derivada (Relación marginal de Substitución, RMS).

El análisis de las respuestas y las entrevistas realizadas se han centrado en identificar diferencias en la manera en la que los estudiantes son capaces de identificar la relación entre los dos conceptos económicos como una relación entre una función y su derivada (en el caso de ser cóncava y convexa). De este análisis hemos identificado una característica del esquema de la relación función-derivada en conceptos económicos tematizado, considerando cómo dotan de significado económico a la concavidad/convexidad de las funciones económicas: Identificar la relación función – derivada en conceptos económicos, independientemente del tipo de convexidad.

3. RESULTADOS

Identificar las relaciones función-derivada cuando el concepto económico Curva de Indiferencia es cóncava plantea desafíos a los estudiantes situados en el nivel Trans dado que en el currículo de Microeconomía el estudio de este concepto (y su derivada la Relación Marginal de Substitución) suelen presentarse como funciones convexas por ser la implicación económica más realista. Por ejemplo, el estudiante Al.21 es capaz de identificar la relación función-derivada cuando el concepto económico Curva de Indiferencia viene representado mediante una función convexa (Figura 2). Este alumno calcula en primer lugar el valor de Relación Marginal de Substitución en el punto pedido. Posteriormente obtiene una expresión algebraica de la Curva de Indiferencia (100/X), a continuación calcula la derivada y la representa gráficamente. Finalmente calcula la segunda derivada y concluye que la función es convexa al ser la segunda derivada positiva en R^+.

Figura 2. Respuesta del estudiante Al.21 al ítem 4.1 de la tarea 4



Tarea 4

4.1 Un consumidor presenta la siguiente curva de indiferencia respecto de los bienes de consumo X e Y:

- Calcula la Relación Marginal de Substitución (RMS) en el punto presentado

- Dibuja cómo sería la gráfica de la primera derivada de esta función (X en abcisas y RMS en ordenadas) y argumenta por qué es convexa utilizando el concepto de 2ª derivada (puedes apoyarte en expresiones algebraicas que se correspondan con las formas gráficas de las funciones si lo crees oportuno)

Respuesta

a) $RMS = -\frac{y}{x} = -\frac{20}{5} = -4$

b) $y = \frac{100}{x} = 100x^{-1}$

$\partial y/\partial x = -\frac{100}{x^2}$

segunda derivada $= \frac{200}{x^3}$

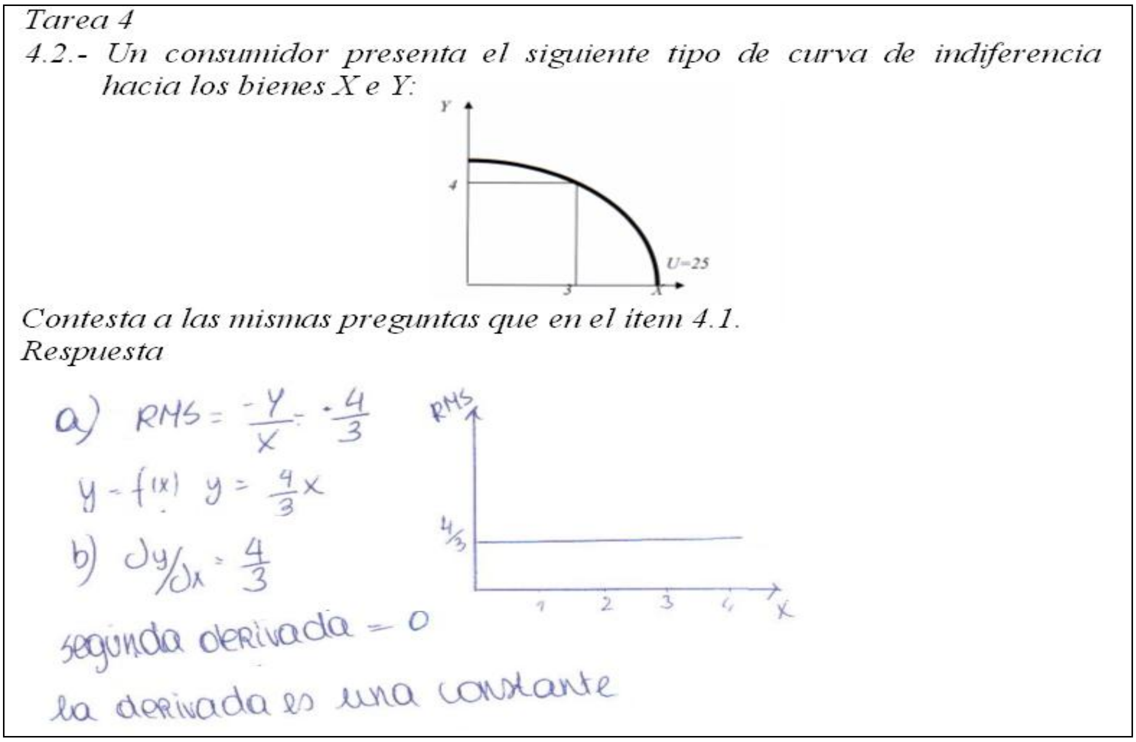
Es convexa porque la segunda derivada es positivo

Durante la entrevista Al.21 pone de manifiesto que entiende el significado económico de convexidad (*que la RMS es cada vez más pequeña ya que el individuo renuncia a menos cantidad de Y cada una nueva de X ...)* y matemáticamente lo corrobora indicando que tendría que dibujar la 2ª derivada.

Inv.: *¿Qué significa económicamente que la C.I. sea convexa?*
Al.21.: *que la RMS es cada vez más pequeña ya que el individuo renuncia a menos cantidad de Y cada una nueva de X*
Inv.: *¿qué forma tendría la gráfica de la 2ª derivada?*
Al.21.: *pues no sé, así de golpe…tendría que representar dando valores, si no no sabría*

Sin embargo, no es capaz de establecer relaciones correctas cuando la función es cóncava como se observa en las respuestas al ítem 4.2 (Figura 3). Confunde el valor de la derivada en un punto con la función derivada al indicar que 4/3 es el valor de la derivada, lo que le lleva a escribir erróneamente la función origen como 4/3x.

Figura 3. Respuesta del estudiante Al.21 al ítem 4.2 de la tarea 4



En la entrevista Al.21 dice que la función es cóncava, si bien lo hace por eliminación (*…imagino que será cóncava porque si la otra es convexa…* (en relación a la función del apartado a)), sin dar ninguna explicación ni establecer relaciones entre función y derivada en ambos registros.

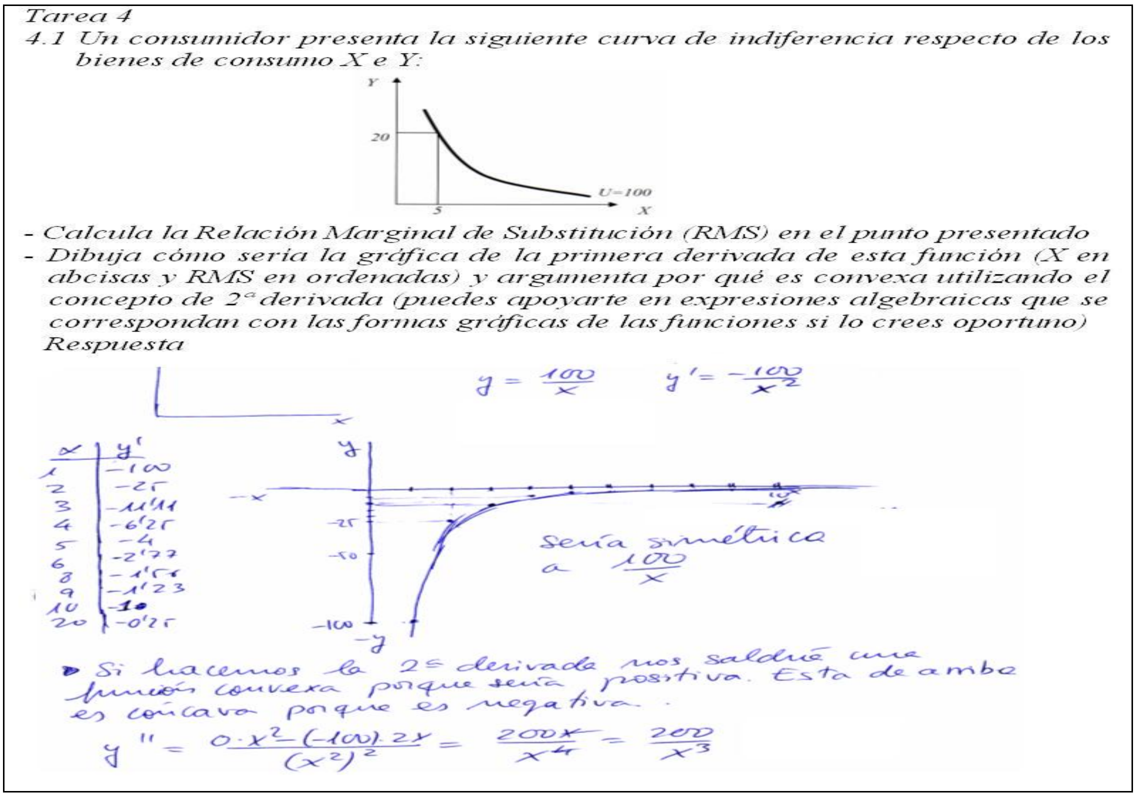
Inv.: *¿En esta dices que la Curva de Indiferencia es 4/3x, ¿crees que esa expresión es no lineal?*
Al.21.: *no, claro que es lineal, pero la gráfica del ejercicio no lo es, ya lo sé…es que era muy rara, no he sabido sacarla…como la RMS me daba 4/3 pues he cogido y he puesto 4/3x para que la derivada dé eso…4/3. Por eso he dibujado una constante*
Inv.: *y luego dices que la segunda derivada es 0*
Al.21.: *claro, al hacer a 2ª derivada me da 0, pero está claro que eso no es…esa función era muy rara, está claro que no es lineal pero tampoco es convexa como la del apartado a)*
Inv.: *¿entonces ¿cómo dirías que es?*
Al.21.: *pues es lo contrario, imagino que será cóncava porque si la otra es convexa, pero no te sé decir por qué, ni sé cuál es la ecuación para poder derivarla.*

El comportamiento ejemplificado por el estudiante Al.21 muestra de qué manera la concavidad en un concepto económico crea dificultades en los alumnos impidiéndoles identificar las relaciones función – derivada. La manera en la que se realiza esta acción con éxito se describe a continuación.

Existen estudiantes capaces de identificar la relación función – derivada en conceptos económicos independientemente del tipo de convexidad. Estos estudiantes muestran cierta reorganización y reconstrucción del uso de la derivada en conceptos económicos. Una característica del comportamiento de estos estudiantes es que son capaces de identificar los conceptos económicos en los que la derivada está presente de modo implícito tanto en las funciones (convexas) que habitualmente se utilizan en Microeconomía como en las funciones (cóncavas) no usadas habitualmente por su carácter no realista.

Por ejemplo, Al.1 obtiene (Figura 4) en primer lugar una expresión algebraica de la función (100/X) para luego calcular la derivada y representa su gráfica a partir de los valores de la derivada punto por punto. El camino seguido en esta resolución podríamos describirlo como: “desde la expresión de la función derivada a la derivada en punto por punto y de ahí a su forma gráfica”, más que “de la derivada en un punto a la función derivada”. Esta resolución sugiere que el estudiante esté usando la relación entre función y su derivada que subyace a estos dos conceptos económicos. Además representa gráficamente la función derivada ayudándose del registro algebraico a través de conversiones y calcula la segunda derivada lo que le permite concluir que la función es convexa al ser positiva.

Figura 4. Respuesta del estudiante Al.1 al ítem 4.1 de la tarea 4



Tarea 4

4.1 Un consumidor presenta la siguiente curva de indiferencia respecto de los bienes de consumo X e Y:

- Calcula la Relación Marginal de Substitución (RMS) en el punto presentado
- Dibuja cómo sería la gráfica de la primera derivada de esta función (X en abcisas y RMS en ordenadas) y argumenta por qué es convexa utilizando el concepto de 2ª derivada (puedes apoyarte en expresiones algebraicas que se correspondan con las formas gráficas de las funciones si lo crees oportuno)

Respuesta

$y = \frac{100}{x}$ $y' = -\frac{100}{x^2}$

x	y'
1	−100
2	−25
3	−11'11
4	−6'25
5	−4
6	−2'77
8	−1'56
9	−1'23
10	−1
20	−0'25

sería simétrica a $\frac{100}{x}$

• Si hacemos la 2ª derivada nos saldrá una función convexa porque sería positiva. Esta de arriba es cóncava porque es negativa.

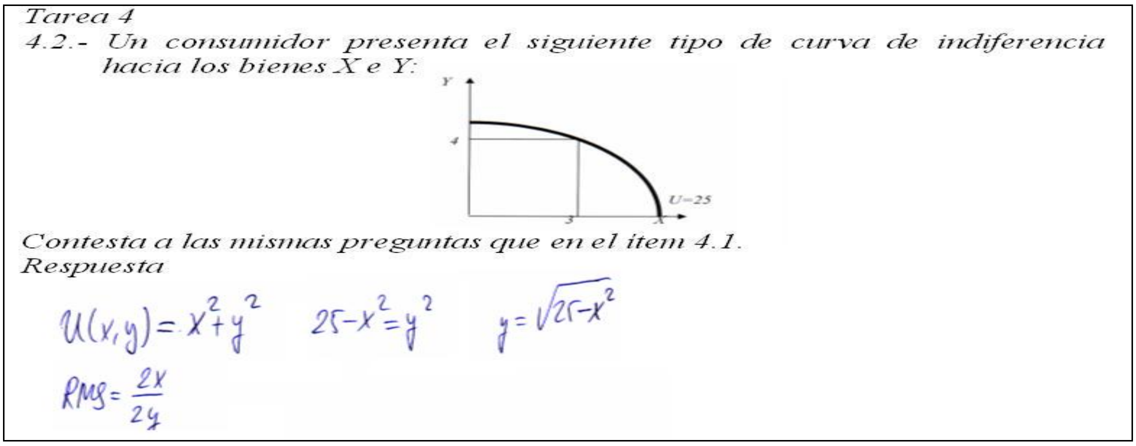
$y'' = \frac{0\cdot x^2-(-100)\cdot 2x}{(x^2)^2} = \frac{200x}{x^4} = \frac{200}{x^3}$

En la entrevista Al.1 da muestras de que entiende el significado económico de convexidad (…*económicamente quiere decir que la RMS es en valor absoluto cada vez más pequeña…)* y matemáticamente lo corrobora haciendo el cálculo de la 2ª derivada. No necesita de la representación gráfica de la 2ª derivada para saber que la función es convexa, y en la última respuesta explica desde la representación gráfica de la función origen qué implica que sea convexa (al decir que la pendiente es cada vez menor). Es capaz de entender el concepto de convexidad en ambos registros, pero prefiere el cálculo algebraico para corroborar la convexidad de la función.

Inv.: *En el examen dices que la función es convexa porque la 2ª derivada es positiva, pero ¿qué significado económico tiene el que la función sea convexa?*
Al.1: *Bueno…económicamente quiere decir que la RMS es en valor absoluto cada vez más pequeña, porque el individuo está dispuesto a renunciar a cada vez menos cantidad del otro bien, que le es más escaso cada vez que consume más del otro bien, por eso tiene esa forma convexa.*
Inv: *¿y qué es la RMS?*
Al.1: *pues la tasa a la que el individuo está dispuesto a intercambiar un bien por otro manteniendo la utilidad constante.*
Inv.: *ya ya, ¿pero matemáticamente qué es?*
Al.1: *la pendiente de la Curva de Indiferencia, no? La derivada…por eso se puede calcular dividiendo las derivadas parciales, o directamente como aquí, derivando 100/x*
Inv.: *¿sabrías dibujar la representación gráfica de la 2ª derivada?*
Al.1: *bueno, supongo que dando valores a* $200/x^3$ *saldría*
Inv.: *¿crees que teniendo esa gráfica podrías deducir que la Curva de Indiferencia es convexa?*
Al.1: *pues no sé, yo creo que para saber si es convexa es mejor ver directamente si la 2ª derivada es positiva*
Inv.: *¿y si no tienes la ecuación de la función y no puedes por tanto calcular la derivada? ¿Cómo sabrías entonces si es convexa?*
Al.1: *pues por la forma…está claro que la Curva de Indiferencia es convexa porque la pendiente es cada vez menor…lo que he dicho antes…la RMS en valor absoluto es cada vez más pequeña, pero yo creo que no hace falta hacer la gráfica de la 2ª derivada para verlo.*

Al.1 también es capaz de realizar las mismas relaciones entre ambos conceptos económicos cuando la función es cóncava (caso raro en el currículo de microeconomía). Sin embargo, en su respuesta al ítem 4.2. (Figura 5)

Figura 5. Respuesta del estudiante Al.1 al ítem 4.2 de la tarea 4


Tarea 4

4.2.- Un consumidor presenta el siguiente tipo de curva de indiferencia hacia los bienes X e Y:

Contesta a las mismas preguntas que en el ítem 4.1.

Respuesta

$U(x,y) = x^2 + y^2 \qquad 25 - x^2 = y^2 \qquad y = \sqrt{25-x^2}$

$RMS = \frac{2x}{2y}$

La resolución realizada y la justificación dada durante la entrevista indican el uso de la concavidad de la función para explicar la situación económica en un contexto diferente al usado normalmente. Este estudiante no llega a calcular algebraicamente la 2ª derivada por su complejidad pero parece que podría llegar a ella, y vuelve a mencionar la necesidad de que el cálculo sea negativo para hablar de concavidad. De nuevo, a través de los dos registros, el alumno usa los significados de los conceptos económicos y aplica entre ellos las mismas relaciones entre función y derivada que en los otros conceptos. Todo ello partiendo de una situación donde solamente podía obtenerse el valor de la derivada en un punto.

Inv.: *En este último ejercicio no haces nada más que esto…*
Al.1.: *Ya, es que no me dio tiempo, pero creo que sé hacerlo.*
Inv.: *¿Puedes hallar la derivada y'?*
Al.1.: (Escribe) *Pues sería ½ que multiplica a la raíz de 25 - x² pero en el denominador, por la derivada de lo de dentro que sería 2x…no no, -2x; así que quedaría –x/raíz(25-x²).*
Inv.: *¿Cuánto daría la derivada en el punto presentado?*
Al.1.: *Pues nada, se sustituye x por 3…da -3/4.*
Inv.: *¿Y cómo sería gráficamente la función entera?*
Al.1.: *Pues negativa, y…a ver….sí, cada vez más negativa ya que x está en el numerador, así que sería así* (dibuja una función negativa y decreciente).
Inv.: *¿Y qué me dices de la concavidad?*
Al.1: *Pues yo sé que es cóncava, supuestamente la segunda derivada es negativa, pero es que la segunda derivada sale bastante compleja…de todas formas está claro que es cóncava ya que la RMS es cada vez mayor…la pendiente es cada vez más negativa, es todo lo contrario que antes…ahora el individuo quiere renunciar a cada vez más cantidad del bien Y por más del bien X, cosa que no tiene mucho sentido.*

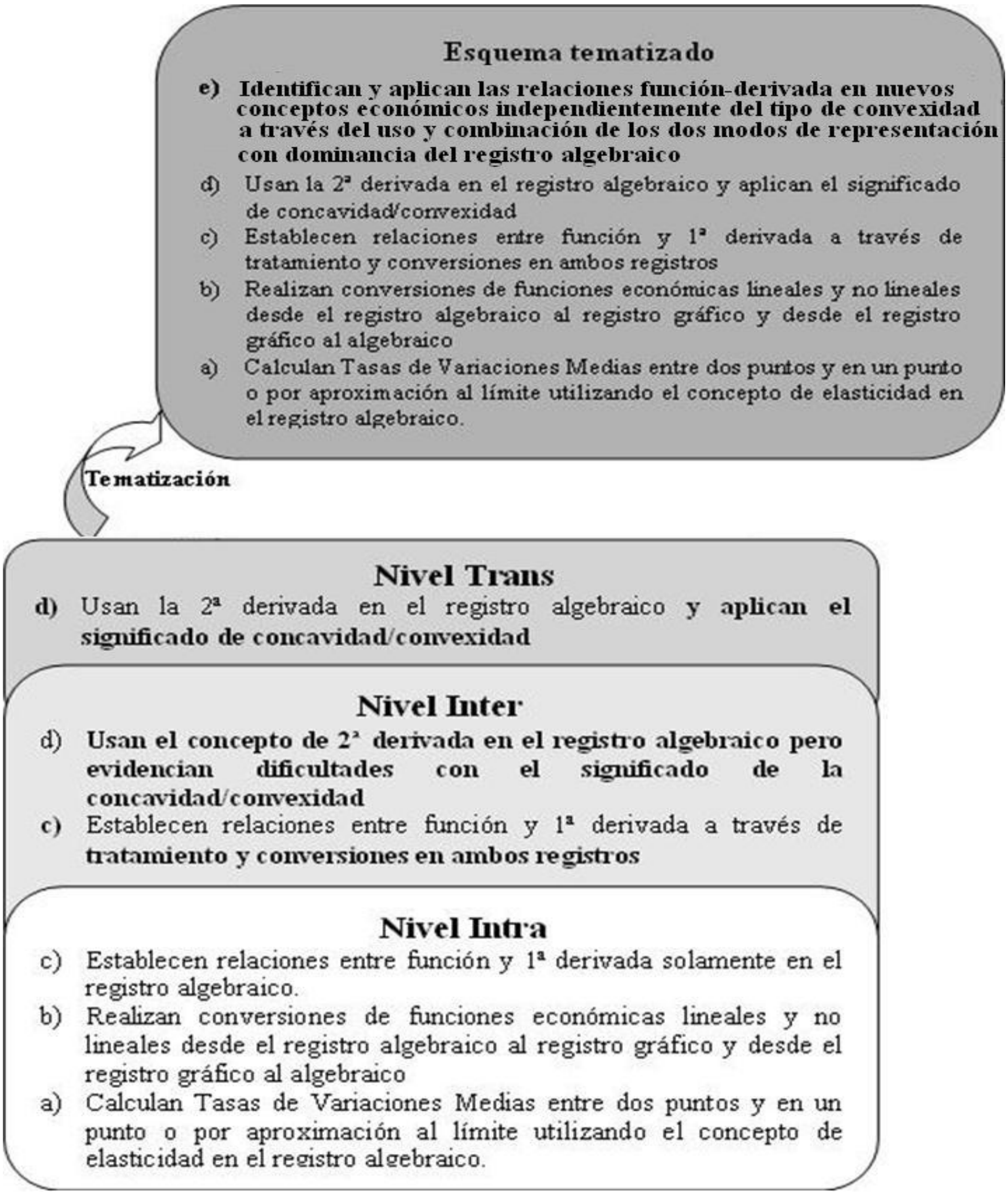
El comportamiento de Al.1 ilustra una característica del esquema tematizado en conceptos económicos al identificar de manera explícita las relaciones función – derivada en conceptos económicos, independientemente del tipo de convexidad como una manifestación de reorganización y reconstrucción de su conocimiento durante la resolución de los problemas.

4. CONCLUSIONES

Los resultados obtenidos indican que la comprensión de numerosos conceptos económicos no puede realizarse sin la comprensión de la relación entre una función y su derivada. El manejo de dicha relación en los registros algebraico y gráfico permite comprender el significado económico de la función origen (que modeliza un determinado concepto económico) y la función derivada (que modeliza a otro concepto económico). En esta relación se incluye la obtención de la segunda derivada, concepto matemático que debe ayudar a mejorar la comprensión del concepto económico modelizado por una función matemática origen. La relación entre una función y su derivada es entendida por los alumnos desde la óptica de referencia del registro algebraico. El manejo de la relación entre la función y la primera derivada se realiza con tratamientos y conversiones entre ambos registros tomando el registro algebraico como referencia principal, incluso cuando los conceptos económicos son presentados solamente en el registro gráfico. En cuanto a las relaciones con la segunda derivada, ésta se obtiene solamente en el registro algebraico, y se aplica la obtención de su valor algebraico para interpretar el significado del concepto económico modelizado por la función matemática origen.

La aplicación de todas las relaciones entre función–derivada y significados en otros conceptos económicos sea cual sea su convexidad/concavidad indican que el esquema de la relación función-derivada en conceptos económicos se ha tematizado. Para tematizar el esquema, los alumnos construyen primero las relaciones función–primera derivada en el registro algebraico (nivel INTRA), y posteriormente las construyen utilizando ambos registros (nivel INTER), para finalmente construir esas relaciones a través también de la segunda derivada (nivel TRANS) y su aplicación en nuevos conceptos (ESQUEMA TEMATIZADO) modelizados tanto por funciones convexas como cóncavas (Figura 6)

Figura 6. Características tematización



5. REFERENCIAS

Akihito, A. (2006). Teaching Marginal Analysis: On the importante of emphasising the second-order condition. *International Reviewer of Economics Education, 5*(1), pp. 46-59.

Ariza, A. & Llinares, S. (2009). Sobre la aplicación y uso del concepto de derivada en el estudio de conceptos económicos en estudiantes de Bachillerato y Universidad. *Enseñanza de las Ciencias, 27*(1), pp. 121-136.

Ariza, A., Llinares, S., Valls, J. (2015). Students' understanding of the function-derivative relationship when learning economic concepts. *Mathematical Education Research Journal, 27*(4), pp. 615-635. doi: 10.1007/s13394-015-0156-9.

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinksy, E., Oktaç, A., Roa Fuentes, S., Trigueros, M., Weller, K. (2014). *APOS Theory. A Framework for Research and Curriculum Development in Mathematics Education*. London: Springer.

Baker, B., Cooley, L. & Trigueros, M. (2000). A calculus graphing schema. *Journal for Research in Mathematics Education, 31*(5), 557-578.

Boyd, D. (1998). On the Use of Symbolic Computation in Undergraduate Microeconomics Instruction. *Journal of Economic Education*, *29*(3), pp. 227-246.

Cohn, E. (2001). Do Graphs Promote Learning in Principles of Economics? *Journal of Economic Education*, *32*(4), pp.299-310.

Cooley, L., Trigueros, M. & Baker, B. (2003). Scheme thematization: A framework and an example. *Journal for Research in Mathematics Education, 38*(4), 370 – 392.

Cuesta,A., Delofeu, J. & Mendez, M.A. (2010). Análisis del proceso de aprendizaje de los conceptos de función y extremo de una función en estudiantes de Economía. *Educación Matemática, 22*(3), 5-21.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In D. Tall (Ed.) *Advanced mathematical thinking*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 95-123.

García, L.; Azcárate, C. & Moreno, M. (2006). Creencias, concepciones y conocimiento profesional de profesores que enseñan cálculo diferencial a estudiantes de ciencias económicas. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, *9*(1), 85-116.

García, M.; Llinares, S. & Sánchez-matamoros, G. (2011). Characterizing thematized derivative schema by the underlying emergent structures. *International Journal of Science and Mathematics Education, 9*, pp. 1023-1045.

Hey, J.D. (2005). I Teach Economics, Not Algebra and Calculus. *Journal of Economic Education*, *36*(3), pp. 292-304.

Piaget, J. & Inhelder, B. (1978). *Psicología del niño* (8a. ed.). Madrid: Morata.

Piaget, J. & García, R. (1983, 1989). *Psicogénesis e historia de la ciencia.* Madrid, España: Siglo Veintiuno Editores.